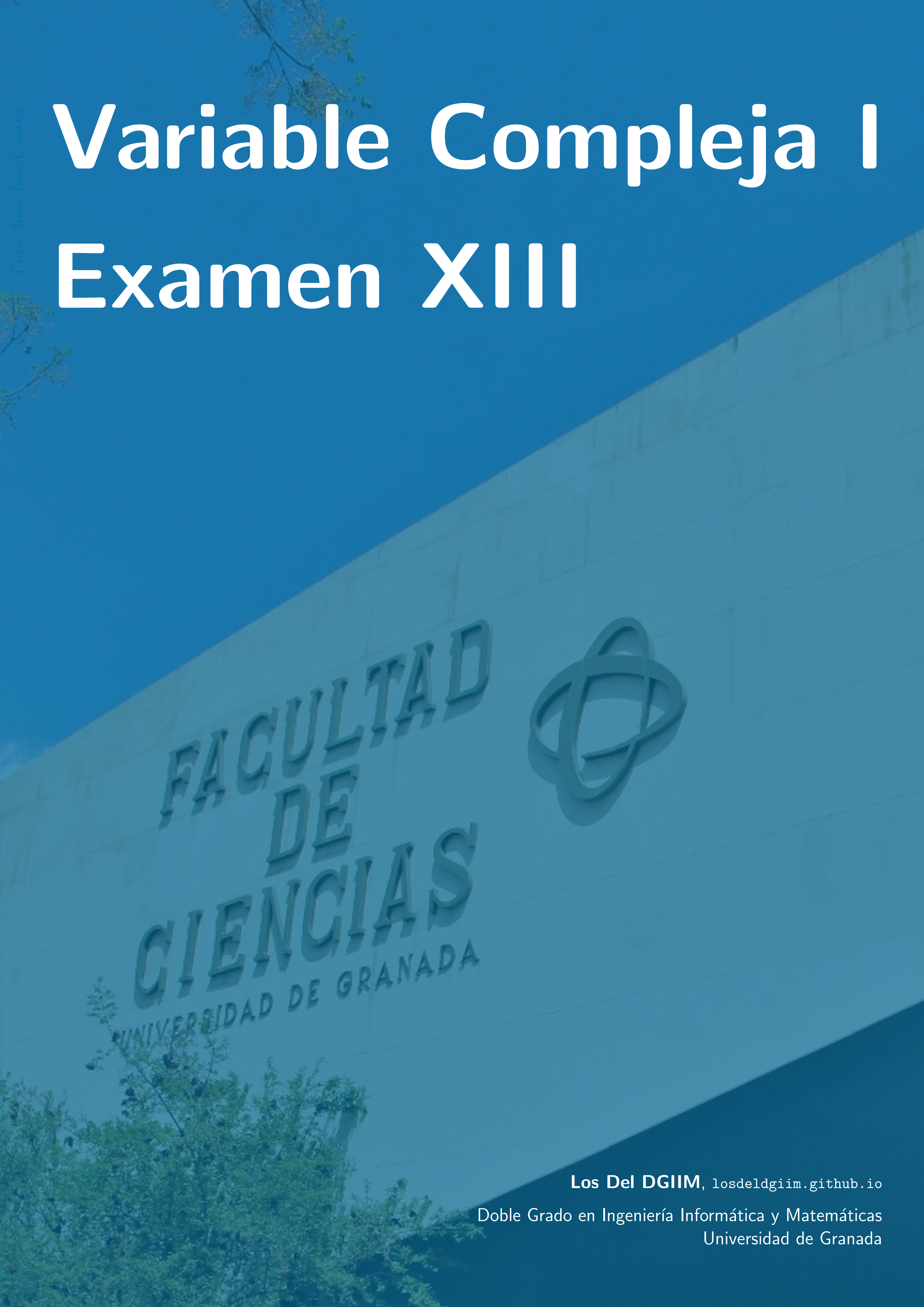
Variable Compleja I

Examen XIII



Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Variable Compleja I
Examen XIII

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Variable Compleja I.

Curso Académico 2024-25.

Grado Grado en Matemáticas y Doble Grado en Matemáticas y Física.

Grupo Único.

Profesor Javier Merí de la Maza.

Descripción Convocatoria Extraordinaria.

Fecha 10 de Febrero de 2025.

Duración 3.5 horas.

Ejercicio 1 (2.5 puntos)**.** Sean S un conjunto finito de puntos en un dominio Ω homológicamente conexo y f una función holomorfa en $\Omega \setminus S$. Prueba que f tiene una primitiva en $\Omega \setminus S$ si y solo si

$$\operatorname{Res}(f, w) = 0, \quad \forall w \in S.$$

Ejercicio 2 (2.5 puntos)**.** Sea $f : \overline{D}(0,1) \to \mathbb{C}$ continua en $\overline{D}(0,1)$ y holomorfa en $D(0,1)$ de modo que $f(z) \in \mathbb{R}$ para cada $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$. Prueba que f es constante.

Ejercicio 3 (2.5 puntos)**.** Demuestra que no puede existir una función f entera verificando

$$|f(z)| > |z| + |\operatorname{sen}(z)|, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Ejercicio 4 (2.5 puntos)**.** Sean f, g holomorfas en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ verificando $f(n) = n^2 g(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que existen $\lim_{z \to \infty} f(z) \in \mathbb{C}$ y $\lim_{z \to \infty} z^2 g(z) \in \mathbb{C}$. Prueba que

$$f(z) = z^2 g(z) \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Ejercicio 1 (2.5 puntos)**.** Sean S un conjunto finito de puntos en un dominio Ω homológicamente conexo y f una función holomorfa en $\Omega \setminus S$. Prueba que f tiene una primitiva en $\Omega \setminus S$ si y solo si

$$\operatorname{Res}(f, w) = 0, \quad \forall w \in S.$$

$\Longrightarrow$) Supongamos que f tiene una primitiva F en $\Omega \setminus S$. Fijado $w \in S$, queremos calcular:

$$\operatorname{Res}(f, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(w,r)} f(z)\, dz,$$

para cualquier $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{D}(w, r) \cap S = \{w\}$. Consideramos por tanto $r \in \mathbb{R}^+$ suficientemente pequeño de manera que $\overline{D}(w, r) \cap S = \{w\}$. Como $C(w, r)$ es un camino cerrado en $\Omega \setminus S$ y f admite una primitiva en $\Omega \setminus S$, tenemos que

$$\int_{C(w,r)} f(z)\, dz = 0.$$

Por tanto, $\operatorname{Res}(f, w) = 0$.

$\Longleftarrow$) Supongamos que $\operatorname{Res}(f, w) = 0$ para cada $w \in S$. Sea γ un camino cerrado en $\Omega \setminus S$. Como $S \subset \Omega$ es finito, tenemos que $S' \cap \Omega = \emptyset$. Como Ω es homológicamente conexo, podemos aplicar el Teorema de los Residuos sobre el camino γ, obteniendo:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{w \in S} \operatorname{Res}(f, w) = 0.$$

Por la caracterización de las funciones que admiten primitivas, como γ era arbitrario, tenemos que f admite una primitiva en $\Omega \setminus S$.

Ejercicio 2 (2.5 puntos)**.** Sea $f : \overline{D}(0, 1) \to \mathbb{C}$ continua en $\overline{D}(0, 1)$ y holomorfa en $D(0, 1)$ de modo que $f(z) \in \mathbb{R}$ para cada $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$. Prueba que f es constante.

Supongamos que f no es constante, y llegaremos a una contradicción. Consideramos la parte imaginaria de f, que es una aplicación continua. Como $\overline{D}(0, 1)$ es compacto, existen $z_1, z_2 \in \overline{D}(0, 1)$ tales que:

$$\operatorname{Im} f(z_1) = \min\{\operatorname{Im} f(z) : z \in \overline{D}(0, 1)\} \leqslant \max\{\operatorname{Im} f(z) : z \in \overline{D}(0, 1)\} = \operatorname{Im} f(z_2).$$

Como $\mathbb{T} \subset \overline{D}(0, 1)$ y $\operatorname{Im} f(\mathbb{T}) = \{0\}$ por hipótesis, tenemos que:

$$\operatorname{Im} f(z_1) = \min\{\operatorname{Im} f(z) : z \in \overline{D}(0, 1)\} \leqslant 0 \leqslant \max\{\operatorname{Im} f(z) : z \in \overline{D}(0, 1)\} = \operatorname{Im} f(z_2).$$

Por otro lado, como $f \in \mathcal{H}(D(0, 1))$ no es constante, por el Teorema de la Aplicación Abierta tenemos que $f(D(0, 1))$ es un conjunto abierto de $\mathbb{C}$. En particular, dado $z_0 \in f(D(0, 1))$, existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(z_0, r) \subset f(D(0, 1))$. Por tanto, deducimos que $\operatorname{Im} f(z_1) < \operatorname{Im} f(z_2)$.

Como $\operatorname{Im} f(z_1) \leqslant 0 \leqslant \operatorname{Im} f(z_2)$, $\exists j \in \{1, 2\}$ tal que $\operatorname{Im} f(z_j) \neq 0$, y por la hipótesis dada se tiene que $z_j \in D(0, 1)$.

Aplicamos ahora de nuevo el Teorema de la Aplicación Abierta, obteniendo que $f(D(0,1))$ es un conjunto abierto de $\mathbb{C}$ con $f(z_j) \in f(D(0,1))$ y $\operatorname{Im} f(z_j) \neq 0$. Por tanto, existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que:

$$D(f(z_j), r) \subset f(D(0,1)).$$

De aquí, deducimos que:

$$\operatorname{Im} f(z_j) \neq \text{máx}\{\operatorname{Im} f(z) : z \in \overline{D}(0,1)\}$$
$$\operatorname{Im} f(z_j) \neq \text{mín}\{\operatorname{Im} f(z) : z \in \overline{D}(0,1)\}$$

Por tanto, hemos llegado a una contradicción, y concluimos que f es constante.

Ejercicio 3 (2.5 puntos)**.** Demuestra que no puede existir una función f entera verificando

$$|f(z)| > |z| + |\operatorname{sen}(z)|, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Supongamos que existe una función f entera verificando la desigualdad dada. Por tanto:

$$|f(z)| > |z| \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Por tanto:

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty.$$

Por tanto, por el Corolario del Corolario del Teorema de Casorati-Weierstrass, tenemos que f es un polinomio. Por otro lado, tenemos que:

$$|\operatorname{sen}(z)| < |f(z)| \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Por tanto, como $\operatorname{sen}(z)$ es una función entera con crecimiento subpolinómico, tenemos que $\operatorname{sen}(z)$ es un polinomio (clara contradicción). Por tanto, no puede existir una función f entera verificando la desigualdad dada.

Ejercicio 4 (2.5 puntos)**.** Sean f, g holomorfas en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ verificando $f(n) = n^2 g(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que existen $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) \in \mathbb{C}$ y $\lim\limits_{z\to\infty} z^2 g(z) \in \mathbb{C}$. Prueba que

$$f(z) = z^2 g(z) \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

Trabajar con los límites en $+\infty$ no es tan sencillo, puesto que $\{n \in \mathbb{N}\}$ no tiene puntos de acumulación en $\mathbb{C}$. Por tanto, consideramos el siguiente conjunto:

$$A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

Definimos las siguientes funciones:

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{h_1}: & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & f\left(\dfrac{1}{z}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{h_2}: & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \dfrac{1}{z^2}\cdot g\left(\dfrac{1}{z}\right) \end{array}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0} \widetilde{h_1}(z) &= \lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to\infty} f(z) = L_1 \in \mathbb{C},\\
\lim_{z\to 0} \widetilde{h_2}(z) &= \lim_{z\to 0} \frac{1}{z^2}\cdot g\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to\infty} z^2 g(z) = L_2 \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Definimos por tanto las extensiones $h_1, h_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de $\widetilde{h_1}, \widetilde{h_2}$ respectivamente, de modo que:

$$\begin{aligned}
h_1(0) &= L_1,\\
h_2(0) &= L_2.
\end{aligned}$$

De esta forma, tenemos que $h_1, h_2 \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ y continuas en $\mathbb{C}$. Por tanto, por Teorema de Extensión de Riemman, tenemos que $h_1, h_2 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Tenemos que $A' = \{0\} \subset \mathbb{C}$, y:

$$h_1\left(\frac{1}{n}\right) = f(n) = n^2 g(n) = h_2\left(\frac{1}{n}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, por el Principio de Identidad de funciones holomorfas, tenemos que:

$$h_1(z) = h_2(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Para cada $z \in \mathbb{C}^*$, evaluamos dicha igualdad en $1/z$, obteniendo:

$$f(z) = h_1\left(\frac{1}{z}\right) = h_2\left(\frac{1}{z}\right) = z^2 g(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}^*.$$

como queríamos demostrar.